

Worksheet #1 Solutions

$$\textcircled{5} \text{ (a) } i \cdot j = \|i\| \cdot \|j\| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$i \cdot k = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$j \cdot k = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$i \cdot i = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0^\circ = 1$$

$$j \cdot j = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$k \cdot k = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{(b) } v \cdot w = (v_1 i + v_2 j + v_3 k) \cdot (w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

$$= v_1 w_1 (i \cdot i) + v_2 w_1 (j \cdot i) + v_3 w_1 (k \cdot i) + v_1 w_2 (i \cdot j) + v_2 w_2 (j \cdot j) + v_3 w_2 (k \cdot j) + v_1 w_3 (i \cdot k) + v_2 w_3 (j \cdot k) + v_3 w_3 (k \cdot k)$$

$$= v_1 w_1 (1) + 0 + 0 + 0 + v_2 w_2 (1) + 0 + 0 + 0 + v_3 w_3 (1)$$

$$= v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \quad \checkmark$$

$$\textcircled{9} \quad \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2$$

$$= (v+w) \cdot (v+w) + (v-w) \cdot (v-w)$$

$$= v \cdot v + \cancel{v \cdot w} + \cancel{w \cdot v} + w \cdot w + v \cdot v - \cancel{v \cdot w} - \cancel{w \cdot v} + w \cdot w$$

$$= 2v \cdot v + 2w \cdot w$$

$$= 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

$$= 2(\|v\|^2 + \|w\|^2) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{10} \quad (v \times w) \cdot (v \times w) = (v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2$$

$$\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - (\|v\| \|w\| \cos \theta)^2$$

$$= \|v\|^2 \|w\|^2 - \|v\|^2 \|w\|^2 \cos^2 \theta$$

$$= \|v\|^2 \|w\|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2 \theta$$

$$= (\|v\| \|w\| \sin \theta)^2$$

$$= \|v \times w\|^2 \quad \checkmark$$